Musterlösung zu Übungsblatt 3

(Lineare Algebra I, SoSe 2018)

carsten.feldkamp@hhu.de

Aufgabe 1:

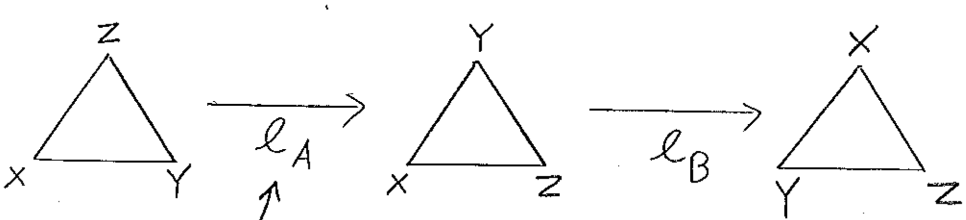
geg.: $G = (\{\underbrace{r_0, r_{120}, r_{240}}_{\text{Rotationen (math. pos. Drehrichtung)}}, \underbrace{\ell_A, \ell_B, \ell_C}_{\text{Spiegelungen an der Symmetrieachse durch die jeweils angegebene Ecke}}\}, \circ)$

G: Symmetriegruppe des Dreiecks

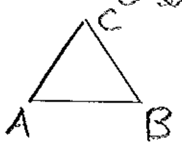
(a)

$\circ$	r_0	r_{120}	r_{240}	ℓ_A	ℓ_B	ℓ_C
r_0	r_0	r_{120}	r_{240}	ℓ_A	ℓ_B	ℓ_C
r_{120}	r_{120}	r_{240}	r_0	ℓ_C	ℓ_A	ℓ_B
r_{240}	r_{240}	r_0	r_{120}	ℓ_B	ℓ_C	ℓ_A
ℓ_A	ℓ_A	ℓ_B	ℓ_C	r_0	r_{120}	r_{240}
ℓ_B	ℓ_B	ℓ_C	ℓ_A	r_{240}	r_0	r_{120}
ℓ_C	ℓ_C	ℓ_A	ℓ_B	r_{120}	r_{240}	r_0

(b) Erklären Sie, warum $\ell_B \circ \ell_A = r_{240}$ ist:



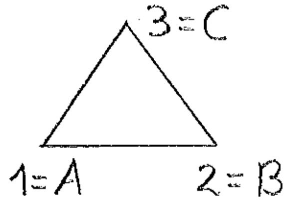
„A" steht immer für die Ecke unten links, denn das Vergleichsdreieck bleibt



Insgesamt also r_{240}.

Alternative:

Argumentation mit der S_3-Tabelle aus dem Skript



$\Rightarrow$ ℓ_A entspricht γ_1

ℓ_B entspricht γ_2

r_{240} entspricht β

Laut Skript: $\gamma_2 \circ \gamma_1 = \beta$

Aufgabe 2:

geg.: a) $\mathbb{Z}$ mit der Verkn. $x * y = x + 2y$

b) $\mathbb{Z}$ mit der Verkn. $x * y = x + y + 1$

Überprüfen Sie die Gruppenaxiome 1), 2) und 3) aus Def. 4.1.1.

zu a):

zu (1): $a*(b*c) = a + 2(b*c) = a + 2(b+2c)$

$= a + 2b + 4c$

$(a*b)*c = (a+2b)*c = a + 2b + 2c$

Somit: $0*(0*1) = 4 \neq (0*0)*1 = 2$

$\Rightarrow$ (1) ist nicht erfüllt

zu (2): ges.: $e \in \mathbb{Z}$ mit $x*e = x$ und $e*x = x$

$x*e = x \Leftrightarrow x + 2e = x \Leftrightarrow 2e = 0$

$\Leftrightarrow e = 0$, aber

$0*1 = 0 + 2\cdot 1 = 2 \neq 1$

Somit ist (2) nicht erfüllt.

zu (3): Ohne neutrales Element e lässt sich Axiom (3) nicht formulieren.

zu b):

zu (1): $a*(b*c) = a*(b+c+1) = a+b+c+2$

$(a*b)*c = (a+b+1)*c = a+b+c+2$ $=$ ✓

Axiom (1) ist erfüllt

zu (2): $x * e = x \Leftrightarrow x + e + 1 = x \Leftrightarrow e = -1$

$-1 * x = x \Leftrightarrow -1 + x + 1 = x \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

Das neutrale Element ist somit -1.

zu (3): Beh.: Das inverse Element zu $x \in \mathbb{Z}$ ist $-x-2$

Wir rechnen nach:

$x * (-x-2) = x - x - 2 + 1 = -1 \overset{\text{siehe}(2)}{=} e$

$(-x-2) * x = -1 = e$

Somit stimmt die Beh.

Aufgabe 3:

(a) ges.: Bsp. einer endl. Gruppe $(G, *)$ und $x, y \in G$ mit $\mathrm{Ord}(x*y) \neq \mathrm{Ord}(x) \cdot \mathrm{Ord}(y)$

Siehe Aufg. 1 bzw. S_3 aus dem Skript:

$\mathrm{Ord}(\ell_A) = \mathrm{Ord}(\ell_B) = 2, \quad \mathrm{Ord}(r_{240}) = 3$

$\Rightarrow \mathrm{Ord}(\ell_B \circ \ell_A) \underset{\text{Aufgabenstellung Aufg. 1}}{=} \mathrm{Ord}(r_{240}) = 3 \neq 2 \cdot 2 = 4$

Bem.: Noch einfacher mit $y = x^{-1}$ möglich.

(b) geg.: Gruppe $(G, *)$

z.z.: $\mathrm{Ord}(x*y) = \mathrm{Ord}(y*x) \quad \forall x, y \in G$

Sei $m = \mathrm{Ord}(x*y)$ und $n = \mathrm{Ord}(y*x)$ mit $m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Für $m < \infty$ gilt laut Def. 5.1.1:

$$\underbrace{(x*y) * (x*y) * \dots * (x*y)}_{m\text{-mal}} = e \quad \Big| \; x^{-1} * (\;) * x$$

$$\Leftrightarrow x^{-1} * \underbrace{(x*y) * \dots * (x*y)}_{m\text{-mal}} * x = x^{-1} * e * x$$

Assoziativgesetz

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{(y*x)*(y*x)*\ldots*(y*x)}_{m\text{-mal}} = e$$

Somit gilt laut Def. 5.1.1:

$n \leq m$ (insbs. $n < \infty$)

Aus Symmetriegründen folgt $m \leq n$ für $n < \infty$, also insgesamt $m = n$ für $n < \infty$ oder $m < \infty$.

Für $m = n = \infty$ ist nichts zu zeigen. $\square$

c) z.z.: $\mathrm{Ord}(x) = \mathrm{Ord}(x^{-1}) \quad \forall x \in G$

Sei $\mathrm{Ord}(x) = m$, $\mathrm{Ord}(x^{-1}) = n$ $(m, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$

Für $m < \infty$: $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{m\text{-mal}} = e$

$$\Longrightarrow \quad e = \underbrace{x^{-1} * x^{-1} * \ldots * x^{-1}}_{m\text{-mal}}$$

m-maliges Verknüpfen mit x^{-1}

Somit $n \leq m$ (insbs. $n < \infty$)

Aus Symmetriegründen ($y := x^{-1} \Rightarrow y^{-1} = x$) folgt $m \leq n$ für $n < \infty$.

Insgesamt also:

$m = n$ für $m < \infty$ oder $n < \infty$

Für $m = n = \infty$ ist nichts zu zeigen.

<u>Bem.:</u> Die Schreibweisen $(a*b)^m$, x^m usw. sind natürlich auch erlaubt.

<u>Aufgabe 4:</u>

z.z.: $S_3 = \langle \alpha, \gamma_1 \rangle$

<u>Bew.:</u> Es reicht, alle Elem. aus S_3 mit α, γ_1 darzustellen. Dazu benutzen wir die Tabelle aus dem Skript.

$id = \gamma_1 \circ \gamma_1$, $\beta = \alpha \circ \alpha$, $\gamma_2 = \alpha \circ \gamma_1$

$\gamma_3 = \gamma_1 \circ \beta$ schon erzeugt, also erlaubt

$(= \gamma_1 \circ \alpha \circ \alpha)$

<u>Aufgabe 5:</u>

ges.: Liste aller Untergruppen von S_3
+ z.z.: Die Liste ist komplett.

zunächst beobachten wir:

$$S_3 \underset{\text{Aufg. 4}}{=} \langle \alpha, \gamma_1 \rangle = \langle \alpha, \underbrace{\gamma_1 \circ \alpha}_{= \gamma_2} \rangle = \langle \alpha, \underbrace{\alpha \circ \gamma_1}_{\gamma_3} \rangle$$

Eine solche Gleichheit kann immer gezeigt werden, indem wir die Erzeuger von links mit denen von rechts darstellen und umgekehrt.

$$= \langle \underbrace{\alpha^{-1}}_{= \alpha \circ \alpha = \beta}, \gamma_i \rangle \quad (\forall i \in \{1, 2, 3\})$$

Wir bauen nun alle Untergruppen auf, indem wir <u>systematisch</u> Erzeuger hinzufügen:

(Kein Erzeuger:) $\langle id \rangle = \{ id \}$

<u>Ein Erzeuger:</u>

$\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \{ id, \alpha = \beta^2 = \beta^{-1}, \beta = \alpha^2 = \alpha^{-1} \}$

$\langle \gamma_1 \rangle = \{ id, \gamma_1 \}$, $\langle \gamma_2 \rangle = \{ id, \gamma_2 \}$,

$\langle \gamma_3 \rangle = \{ id, \gamma_3 \}$

Zwei Erzeuger:

Wir haben bereits

$$S_3 = \langle \delta , \varsigma_i \rangle \quad \forall \delta \in \{\alpha, \beta\} , \varsigma_i \in \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

gezeigt.

Bleiben noch:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \underbrace{\alpha \circ \beta}_{= id} \rangle = \langle \alpha \rangle$$ (nur ein Erzeuger $\Rightarrow$ schon bekannt)

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \langle \gamma_1, \underbrace{\gamma_1 \circ \gamma_2}_{= \alpha} \rangle = S_3 = \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle \text{ (für } i \neq j)$$

(schon bekannt)

Da bereits zwei beliebige Erzeuger S_3 oder $\langle \alpha \rangle$ erzeugen, sind keine größeren Mengen von Erzeugern mehr zu betrachten.

Als komplette Liste alle Untergr. von S_3 erhalten wir:

$$\{id\}, \{id, \alpha, \alpha^2\}, \{id, \gamma_i\} \ (i \in \{1,2,3\}),$$

$$S_3$$

(6 verschiedene Untergr.)